Le problème des chapeaux

2025

Camille Galimard-Guillerme, élève de première

Etablissement : Lycée polyvalent Fernand Renaudeau (49300 Cholet)

Encadré par : Maëva Tauzin, Marie-Pierre Delhaye

Chercheur : Damien Gobin (université de Nantes)

I – Présentation du sujet

1°/ Intitulé exact

(Une histoire de chapeaux colorés) Pour éviter de devoir relire les 20 copies de ses élèves lors du dernier contrôle un professeur décide de proposer un jeu à ses élèves. Tous les élèves seront en cercle dans la salle de classe avec un chapeau sur la tête. Chaque élève peut voir le chapeau sur la tête des autres mais pas le sien (il n'y a pas de miroir ni de reflet nul part). Chaque chapeau est soit vert, soit jaune. Les élèves sont placés en cercle. Chacun leur tour ils ne peuvent dire que le mot « vert » ou « jaune ». Le prof donnera alors pour tous la note correspondant au nombre de personnes à avoir donné la couleur du chapeau sur leur tête.

1. Sachant que le prof utilise régulièrement cette méthode, les élèves peuvent se mettre d'accord à l'avance sur une stratégie à adopter pour être sûr d'avoir un maximum de points. D'après vous, y a-t-il une stratégie pour être sûr d'avoir au moins 10 ? Au moins 13 ? Au moins 19 ? On essaiera de trouver des stratégies qui ne dépendent pas du nombre d'élèves afin que les anciens élèves de ce prof puissent donner leurs astuces aux suivants même s'ils ne sont pas le même nombre.
2. Le prof se rendant compte que les élèves ont de trop bonnes notes décide de passer le nombre de couleurs possibles pour les chapeaux de 2 à 12. Les élèves peuvent-ils continuer d'avoir de très bonnes notes ?

2°/ Première reformulation (notée form1)

On cherche donc à savoir quelle est la stratégie la plus optimale pour obtenir la meilleure note possible (notée z dans le reste de l'article), pour un nombre de couleurs (noté y dans le reste de l’article) et pour un nombre d’élèves (noté x dans le reste de l’article) définis.

On considéra dans certains cas que les couleurs de chapeaux sont en équiprobabilité. Quand cette condition sera appliquée, on notera cette formulation form1équi.

3°/ Seconde reformulation (notée form2 ou form2équi)

Même chose que la première reformulation, sauf que dans le cadre de cette formulation, les communications (verbales ou non-verbales) entre élèves sont sanctionnées d’un point sur la note totale par échange.

II – Recherche

1°/ Résultats dans le cadre de la form1

Sans plus de contraintes, on peut trouver qu’il existe une stratégie quasiment universelle (notée S-uni dans le reste de l’article) permettant d’avoir 20 de façon certaine, c’est-à-dire qu’elle fonctionne pour un nombre quelconque d’élèves et pour un nombre de couleurs compris entre 2 et 144, peu importe qu’elles soient équiprobables ou non.

A – Présentation de S-uni

Il s’agit d’une stratégie de communication entre élèves, qui repose sur le fait que les élèves voient la couleur des chapeaux de leur voisin qui associe à chaque phalange de tous les doigts sauf le pouce (comptage en base 12) une valeur numérique comprise entre 1 et 144, elle-même associée à une couleur. Les élèves doivent juste s’accorder sur le sens de communication (si on communique avec son voisin de droite ou de gauche) sur la couleur associée à chaque nombre avant le contrôle.

B – Comptage en base 12

Les phalanges de la main droite sont associées aux unités, tandis que les phalanges de la main gauche sont associées aux douzaines. Le pouce sert de pointeur et on commence le pointage des phalanges de la base vers le bout des doigts à partir de l’index, puis du majeur, en continuant avec l’annulaire et en terminant par l’auriculaire. Ainsi, le nombre 100 devient en base 12 devient 84 (8 douzaines et 4 unités), et est donc montré sur les doigts en montrant la deuxième phalange de l’annulaire gauche et la première phalange du majeur droit.

C – Limites de S-uni

- Cette stratégie ne fonctionne que dans le cadre de la form1 : quand les communications entre élèves sont sanctionnées, elle devient contre-productive dès qu’il y a plus de onze élèves, comme le montre ce tableau :

Nombre d'élèves	pts/élèves	points perdus	Note sur 20
1	20	0	20
2	10	1	19
3	6,66666667	2	18
4	5	3	17
5	4	4	16
6	3,33333333	5	15
7	2,85714286	6	14
8	2,5	7	13
9	2,22222222	8	12
10	2	9	11
11	1,81818182	10	10

- De plus, on ne peut pas exclure que si les élèves n’ont pas eu assez de préparation en amont, ils se trompent dans leurs signaux, et donc poussent leurs camarades à donner une mauvaise réponse.

D – Photographie d’un test réalisé en condition simulées en aveugle sur le groupe de chercheurs de Renaudeau

Cette stratégie a été testée sur le groupe selon la stratégie form1. Seules les professeures accompagnatrices connaissait les couleurs des chapeaux sur nos têtes, même si nous voyions les couleurs des chapeaux des autres. Les autres stratégies n’ont pas été testées sur d’autres chercheurs.

E – Résultats du test en conditions simulées

Le test a eu le résultat escompté dans le cadre de la form1 : en conditions réelles, tous les élèves du groupe auraient eu 20. Cependant, nous devons trouver une stratégie qui n'inclurait pas de communication ou de code à mémoriser et qui ne désavantagerait pas les groupes de plus de onze élèves dans le cadre de la form2.

2°/ Résultats dans le cadre de la form2

Dans cette section, on va considérer que y est égal à 2. En plus de la stratégie S-uni, il existe deux autres stratégies, que je vais présenter tout en donnant leurs résultats.

A – Présentation de la stratégie Aléa

Cette stratégie est très simple : chaque élève doit deviner la couleur de son chapeau. Si je ne l'ai pas présenté dans la section II-1°, c'est parce qu'elle est très inefficace : en effet, pour avoir au moins la moyenne, il faut que la moitié des élèves devinent correctement leur couleur de chapeau.

a/Formule de calcul de la probabilité d'avoir au moins la moyenne dans le cadre de la stratégie Aléa

P (z≥10) = ((1/y)*(1/y)*(1/y)*...)(nombre de termes=1/2x) = 1/(y^(1/2x))

(1/y) : En effet, chaque élève doit deviner la couleur de son chapeau parmi y couleurs possibles, la probabilité de tomber

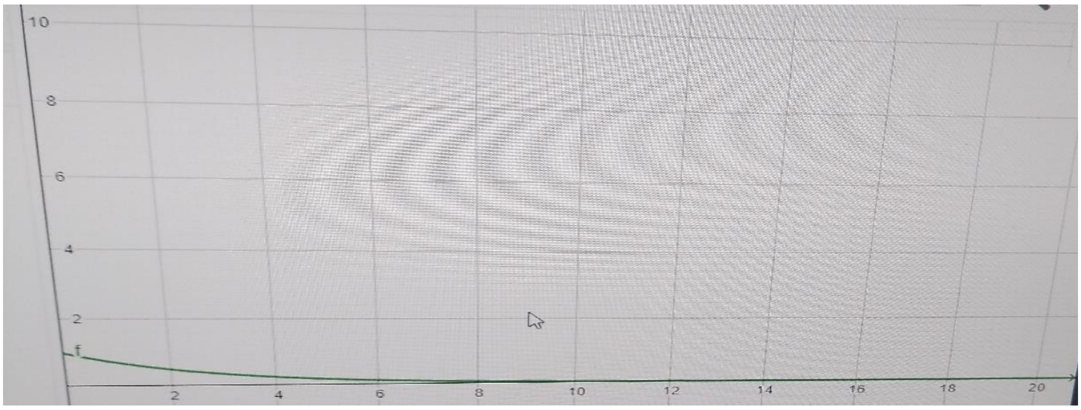
juste est donc de 1/y. Leur somme représente ce qu'ont deviné tous les élèves.
1/2x : Pour avoir la moyenne, il faut qu'au moins la moitié des élèves aient la bonne réponse. Il faut donc que 1/2x élèves aient deviné correctement leur couleur de chapeau, et correspond donc au nombre d'itérations de cette addition.

b/Tableau de présentation de la probabilité d'avoir la moyenne en fonction de x

x	P(Z>10)
2	0,5
3	0,35355339
4	0,25
5	0,1767767
6	0,125
7	0,08838835
8	0,0625
9	0,04419417
10	0,03125
11	0,02209709
12	0,015625
13	0,01104854
14	0,0078125
15	0,00552427
16	0,00390625
17	0,00276214
18	0,00195313
19	0,00138107

Dans ce tableau, on a calculé P(Z≥10) selon la formule vue précédemment, mais je n'ai pas réussi à insérer ce symbole sur Excel.

c/Représentation graphique sur Geogebra de la probabilité d'avoir la moyenne en fonction de x



B – Présentation de la stratégie Majo

Cette stratégie m’a été suggérée par un élève du lycée Caroline Aigle (Nort-sur-Erdre) lors de notre voyage à Nantes en février. Elle est relativement simple et efficace : lorsqu’il existe une couleur majoritaire, tous les élèves doivent la dire.

Cette stratégie permet d’avoir une note supérieure ou égale à 1/y, mais ne garantit pas la médiane pour y>2.

III –Programme Python à tester chez vous pour expérimenter en guise de conclusion

```
from random import*
print ("0 = form 1")
print ("1 = form 2")
def note_S_uni(f,x) :
    x = int(input("Nombre d'élèves?"))
    f = int(input("Dans quel cadre?"))
    if f==0 :
        print("La note est égale à 20")
    else :
        a = 20-x
        if a>0 :
            print ("La note est égale à ",a)
        else :
            print ("La note est égale à 0")
def note_Alea(x,y) :
    y = int(input("Nombre de couleurs de chapeaux?"))
    x = int(input("Nombre d'élèves?"))
    b = 1/(y**(0.5*x))
    print ("La probabilité d'avoir la moyenne est de ",b)
def note_Majo(x,y) :
    N=[]
    for i in range (x) :
        N.append (randint(1,y))
    c = N.count (1)
    if c==1/y :
        print("La classe devrait utiliser une autre stratégie")
    else :
        print("Cette stratégie peut marcher, mais il y a peut-être plus efficace")
```