

Le coureur solitaire

Année 2024 – 2025

Chloé Gaubert et Margot Le Bec

Établissement : Lycée Fernand Renaudeau, Cholet
Enseignante : Maëva Tazuin, Marie-Pierre Delhayé
Chercheur : Damien Gobin, chercheur à Nantes Université

1. Introduction

1.1 Présentation du sujet

On considère un cercle de **longueur 1**. On place **n coureurs** au même point du cercle, point qui sera situé le plus à droite du cercle. Une fois le départ donné, **chaque coureur part dans le sens trigonométrique** (sens inverse des aiguilles d'une montre) à **vitesse constante**, différente pour chacun (aucun n'a la même vitesse qu'un autre).

On s'intéresse alors à la notion de **solitude** : on dit qu'un coureur est **solitaire** à un instant donné s'il se trouve **au centre d'un arc de cercle de longueur $1/n$** où **il est le seul coureur présent**.

PROBLÉMATIQUE : *Peut-on garantir que, pour chaque coureur, il existe un moment où il est solitaire sur le cercle, même si ce moment est différent pour chacun ?*

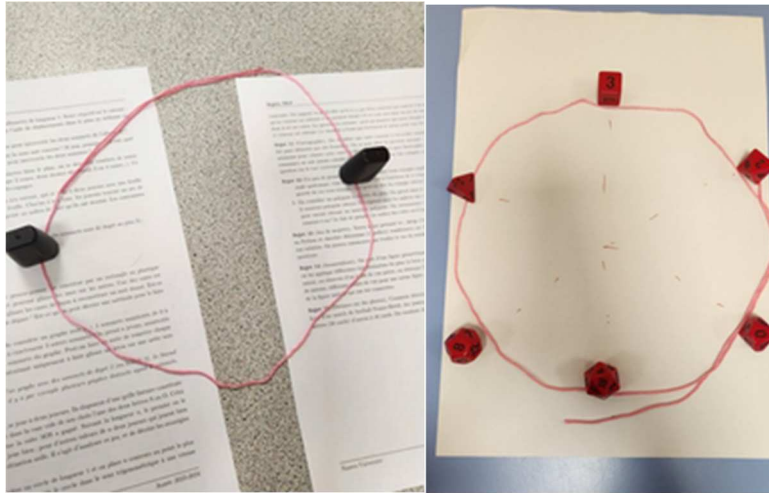
1.2 Compréhension du sujet

Que signifie être solitaire : Un coureur est solitaire à un instant t s'il est seul sur un arc de longueur $1/n$ (n étant le nombre de coureurs), et s'il est au centre de cet arc. Mais on l'a d'abord traité de façon que les points soient solitaires lorsqu'ils sont dans l'arc de cercle, sans tenir compte du fait qu'ils doivent être au centre de leur arc.

2. Les recherches

2.1 Première visualisation sur feuille

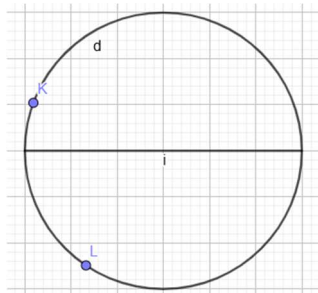
Premièrement nous avons réalisé des modélisations à l'aide de fil et de dés (pions), pour mieux visualiser le problème.



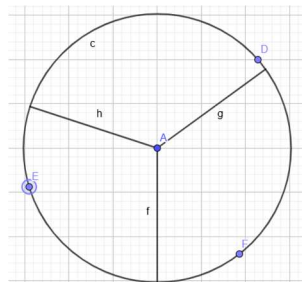
Mais cette visualisation **atteignait** vite ses limites. En effet on ne pouvait pas visualiser les points en mouvement et toucher le cœur du problème donc nous sommes passées sur GeoGebra pour pouvoir visualiser les points qui bougent avec des vitesses différentes.

2.2 Modélisation à l'aide de Géo-Gébra

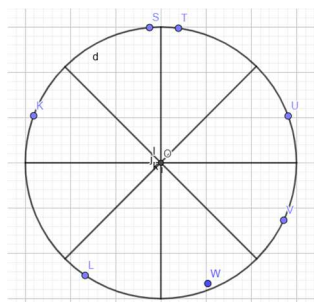
Nous avons commencé avec 2 points. Nous avons pu observer qu'avec 2 points les coureurs étaient chacun solitaires à un instant t , et cela plutôt rapidement.



Nous avons ensuite voulu vérifier pour trois points pour savoir si visuellement ils pouvaient être solitaires. Pour trois points cela fonctionne plutôt bien, effectivement ils se retrouvent rapidement solitaires.



Pour continuer on a voulu voir si pour un plus grand nombre de coureurs, cela fonctionnait toujours. Et en effet cela fonctionne !



Après avoir fait cette rapide vérification visuelle, nous nous sommes penchées sur la démonstration, une partie qui s'est avérée bien plus complexe. Nous avons très rapidement pensé au cercle trigonométrique pour nous aider dans ce processus. Si on l'utilise pour démontrer que deux points arrivent à être solitaires à un instant t alors on considère qu'un des coureurs devra être dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ et l'autre coureur dans l'intervalle $[-\pi ; 2\pi]$.

Pour commencer on a travaillé avec des vitesses données, on a pu voir que selon le rapport entre la vitesse du coureur 1 et le coureur 2, un des coureurs aura fait tant de tours de plus que l'autre coureurs et donc grâce à ça on peut déduire facilement qu'ils sont solitaires à un certain moment.

Par exemple si le coureur 1 va à 5km/h (on nommera cette vitesse V_1) et le coureur 2 va à 10km/h (on nommera cette vitesse V_2). Dans ce cas-là, le coureur 2 a une vitesse 2 fois plus grande que le coureur 1. Par conséquent lorsque le coureur 1 a fait un tour, le coureur 2 en aura fait 2. Donc lorsque le coureur 2 se trouvera dans l'intervalle $[-\pi ; 2\pi]$, les coureurs seront solitaires.

En conclusion, on n'a pas pu aller plus loin car c'est un sujet complexe qui demande beaucoup de temps. En revanche, nous avons eu de nombreuses idées sans trouver de réelles conclusions.

3. Des pistes pour aller plus loin

Premièrement, on pourrait travailler sur le temps qu'un coureur mettrait pour arriver à un autre coureur, en effet au lieu de chercher quand est-ce qu'ils seront solitaires, ne vaudrait-il pas commencer par chercher quand ils ne le seront pas ?

Ensuite nous avons pensé à travailler sur les rapports entre les différentes vitesses des coureurs, pour mieux comprendre à quel moment tel coureur aura fait tant de tour de cercle.

Enfin il nous a été soufflé l'idée de positionner un coureur immobile, c'est-à-dire avec une vitesse nulle. Cela nous permettrait de chercher la position, que, des autres coureurs autrement dis d'observer uniquement les mouvements des autres coureurs par rapport à lui

4. Conclusion

Nous avons vu grâce à nos modélisations (fil/dés, puis GeoGebra) que, même sans démonstration formelle, chaque coureur semble effectivement devenir solitaire à un moment donné. En testant différentes vitesses, nous avons observé que leurs positions se séparaient naturellement avec le temps, et qu'il arrivait régulièrement qu'un coureur soit seul sur un arc de $1/n$.

Même si nous n'avons pas réussi à généraliser pour n coureurs, nos tests avec 2, puis 3, puis plus de coureurs montrent que la solitude finit par apparaître, même si on remarque que plus le nombre de coureurs augmente, plus il faut de temps pour que chacun d'eux devienne solitaire.